

# DIE VERFAHREN ZUM MESSEN DER MAGNETISCHEN FELDSTÄRKE AUF GRUND DER PARAMAGNETISCHEN KERNRESONANZ

von

B. M. JANOVSKY

Universität von Leningrad<sup>1)</sup>

## Z u s a m m e n f a s s u n g

Alle Atomkerne besitzen einen schwachen Paramagnetismus. Sie suchen im magnetischen Feld solche Lagen auf, wo deren magnetischen Achsen in der Richtung der Kraftlinien sind und wo sie gleichzeitig eine Präzessionsbewegung um die Linien ausführen. Wenn ein anderes Wechselfeld  $H'$  senkrecht dem Feld  $H$  mit gleicher Präzessionsfrequenz  $\omega$  einwirkt, beginnen die magnetischen Achsen der Kerne in einer senkrechten Ebene zu den ursprünglichen Kraftlinien zu rotieren. In dieser Weise entsteht eine paramagnetische Kernresonanz. Dabei gilt die Gleichung

$$\omega = \gamma H$$

wo  $\gamma$  ein konstanter Koeffizient, ein gyromagnetischer Beiwert ist.

In der Resonanzerscheinung kann die Frequenz  $\omega$  so genau gemessen werden dass man daraus die Feldintensität  $H$  mit grösserer Genauigkeit als früher erhält.

Der Verfasser behandelt Theorien und experimentelle Resultate in den verschiedenen Anwendungen der paramagnetischen Kernresonanz.

---

<sup>1)</sup> Vortrag, gehalten am 14. Oktober 1959 in der Universität zu Helsinki.

*Historische Übersicht*

Wie sowohl theoretische als auch experimentelle neuzeitliche Untersuchungen ergeben haben, besitzen die Kerne sämtlicher Atome gleich den Elektronen ein eigenes magnetisches Moment und ebenso ein eigenes Impulsmoment.

Aus diesem Grunde verhalten sie sich im magnetischen Feld einerseits nach Art der paramagnetischen Atome, d.h. die streben sich so einzustellen, dass ihre magnetische Achse zum magnetischen Feld parallel wird, und andererseits führen sie gleich den Diamagneten eine Präzessionsbewegung um die Kraftlinien des magnetischen Feldes aus. Dem schwachen Paramagnetismus der Kerne zufolge ist jedoch dessen Nachweis nur bei diamagnetischen Stoffen möglich, da der um mehrere Größenordnungen stärkere Paramagnetismus der Atome denselben der Kerne völlig verdeckt.

Die ersten Versuche zum Entblößen des Paramagnetismus der Kerne wurden von LAZAREW und SHUBNIKOW im Jahre 1937 vorgenommen, und zwar bedienten sie sich des Verfahrens von GUY.

Die Existenz der Präzession der Kernmomente zeigten unabhängig voneinander und gleichzeitig im Jahre 1945 zwei Forschergruppen, die eine aus E. M. PURCELL, H. C. TERREY und R. V. POUND, die andere aus F. BLOCH, A. C. GRAVES, M. E. PACKARD und W. SPENCER bestehend.

Es gelang ihnen, dies in der Weise auszuführen, dass senkrecht zu dem Magnetfeld, um das die Kernpräzession stattfand, ein zweites, wechselndes Magnetfeld wirkte, dessen Frequenz mit derjenigen der Präzession übereinstimmte.

Hierbei ergibt sich, wie theoretische Rechnungen zeigen, für sämtliche Kerne ein Präzessionswinkel von  $90^\circ$ , d.h. die magnetischen Achsen der Kerne beginnen in einer zum Feld  $H$  senkrechten Ebene zu rotieren. Diese Erscheinung hat den Namen paramagnetische Kernresonanz erhalten.

Zum Nachweis dieser Erscheinung genügte es also, den Stoff, dessen Kerne eine Präzessionsbewegung ausführen, in eine Spule einzubringen, die im folgenden als Aufnahmespule bezeichnet werden soll. Die Achse dieser Spule musste in der Präzessionsebene liegen. Die präzedierenden Elementarmagnete, d.h. die Kerne, induzierten dann eine elektromotorische Kraft, deren Betrag mit gegenwärtigen Messmethoden leicht bestimmbar ist.

PURCELL und Mitarbeiter benutzten zum Studium der paramagne-

tischen Kernresonanz feste Paraffine, BLOCH und Mitarbeiter dagegen Wasser. In den Versuchen der erstgenannten Forscher diente ein und dieselbe Spule als Aufnahmespule und auch als Spule, der von aussen ein Wechselstrom zu Erzeugung des Wechselfeldes zugeführt wurde, wobei letzteres quer zum Feld  $H$  stand. Dieses Bestimmungsverfahren der Kernresonanz hat den Namen Dämpfungsmethode erhalten.

In den Versuchen der Gruppe um BLOCH wiederum liegt die Achse der Aufnahmespule quer zu derjenigen der Spule, mit welcher das Wechselfeld hervorgebracht wird, und das Verfahren wird folglich die Induktionsmethode genannt.

Im Augenblick der Resonanz, wobei die Frequenz  $\omega$  der Präzession derjenigen des Wechselfeldes gleich ist, besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Intensität des Feldes  $H$  und der Frequenz  $\omega$ , nämlich die Gleichung

$$\omega = \gamma H \quad (1)$$

worin  $\gamma$  ein konstanter Koeffizient ist, der als gyromagnetischer Beiwert bekannt ist. Aus diesem Grunde kann man die Resonanzerscheinung zum Messen der Intensität des Feldes  $H$  heranziehen, indem man unmittelbar die Frequenz des Wechselfeldes  $H_1$  misst.

Da die Frequenz  $\omega$  mit gegenwärtigen elektrischen und magnetischen Methoden recht genau gemessen werden kann, bietet sich hier eine neue Möglichkeit zum Messen der Intensität des Feldes  $H$  in einer Weise, deren Genauigkeit diejenige aller heutzutage vorhandenen Methoden zur Messung des Feldes  $H$  übertrifft.

Im folgenden soll eine Darstellung der theoretischen und experimentellen Grundlagen dieses Verfahrens gegeben werden, das also auf der paramagnetischen Kernresonanz aufbaut.

### *Freie Kerninduktion*

Zur Messung der Intensität des erdmagnetischen Feldes ist weder das Verfahren von BLOCH noch das von PACKARD anwendbar, weil das bei Feldresonanz zustande kommende Signal zu schwach ist. Haben wir z.B. ein Feld mit  $H = 0,5$  Oe, so ist die im Resonanzfall entstehende elektromotorische Kraft der Grössenordnung

$$E \approx 2 \cdot 10^{-4} U W_0 \text{ [Volt]} \quad (2)$$

Wollten wir nun einen Wert  $E_0$  messen, der beispielsweise nur einem Mikrovolt gleichkäme, so wäre eine Wassermenge von 1000 kg not-

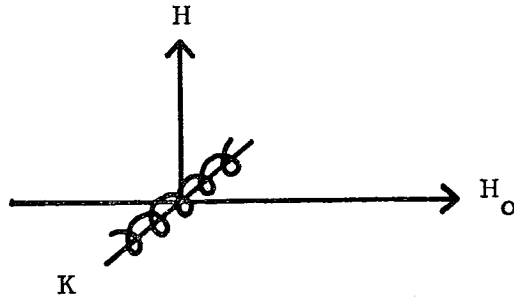


Abb. 1.

wendig, und die Windungszahl je Zentimeter der Spulenlänge müsste 100 betragen. Es gilt somit, um die Signalintensität zu erhöhen, ein Mittel zum Verstärken der Magnetisierung des Messobjekts zu finden und zu erreichen, dass der Magnetisierungsvektor das zu messende Feld umkreist.

Einen solchen Kunstgriff haben im Jahre 1952 VARIAN und PACKARD angegeben, und zwar wird ihr Vorgehen als Methode der freien Kerninduktion bezeichnet. Das Prinzip besteht darin, dass eine mit Wasser gefüllte Ampulle, die wir im folgenden als Prüfling bezeichnen wollen, derart magnetisiert wird, dass senkrecht zu dem zu messenden Feld ein zweites Feld  $H_0$  mit einer tausendmal stärkeren Intensität als die des erdmagnetischen Feldes zustande kommt. Nach Abschalten der Spannung in dem Stromkreis, der dieses Feld erzeugt, beobachtet man in der den Prüfling umgebenden Spule eine elektromotorische Kraft, deren Wirkfeldachse senkrecht zur Richtung des zu messenden Feldes  $H$  steht (Bild 1).

Die in Frage stehende elektromotorische Kraft wird durch die Präzession des Magnetisierungsvektors um das zu messende Feld hervorgerufen. Die Präzession erfolgt frei in einer Ebene, die senkrecht auf der Richtung des zu messenden Feldes steht. Da sich in diesem Fall die Präzession frei, d.h. ohne Beeinflussung durch ein besonderes wechselndes Feld vollzieht, ist es offenbar, dass sie nach erfolgter Relaxation mehr oder weniger rasch abklingen muss. Deshalb sind Beobachtungen mit Bezug auf die freie Induktion nur in solchen Fällen möglich, in denen die Relaxationszeit  $T_1$  länger als diejenige Zeit ist, die man benötigt um nicht nur das Signal wahrzunehmen sondern auch die der Präzessionsfrequenz gleiche Frequenz des Induktionsstroms in der Spule zu bestimmen.

Die theoretische Grundlage der Methode der freien Induktion lässt sich aus den Bewegungsgleichungen der Kernmomente herleiten, die nur insofern abzuändern sind, dass in ihnen  $H = 0$  und  $J_z = 0$  eingesetzt wird. Ferner muss zum Zeitpunkt des Beginns (bei  $T = 0$ ), dem Abschalt Augenblick des magnetierenden Feldes  $H$  entsprechend, die Magnetisierung  $J_0$  folgender Gleichung genügen:

$$J_0^2 = J_{0x}^2 + J_{0y}^2 \tag{3}$$

Somit erhalten die Gleichungen der Kernmomente die Form

$$\frac{dJ_x}{dt} = \gamma H J_y - \frac{J_x}{T_r} \tag{4}$$

$$\frac{dJ_y}{dt} = -\gamma H J_x - \frac{J_y}{T_r} \tag{5}$$

$$\frac{dJ_z}{dt} = 0 \tag{6}$$

worin  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$  die Momentkomponenten des magnetischen Kerns sind, während  $T_r$  die Zeitdauer der transversalen Relaxation des Kerns bezeichnet.

Addition der Gleichungen (4) und (5) mit  $J_x$  bzw.  $J_y$  multipliziert liefert

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (J_x^2 + J_y^2) = -\frac{1}{T_r} (J_x^2 + J_y^2) \tag{7}$$

oder, da  $J^2 = J_x^2 + J_y^2$ ,

$$J = J_0 e^{-\frac{t}{T_r}} \tag{8}$$

Da voraussetzungsgemäss  $J_z = 0$ , haben wir

$$J_x = J \cos \varphi \text{ und } J_y = J \sin \varphi \tag{9}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (4) und (5) mit Berücksichtigen der Gleichung (1) finden wir

$$\varphi = -\omega t \tag{10}$$

und es ist somit

$$J_x = J_0 e^{-\frac{t}{T_r}} \cos \omega t ; J_y = J_0 e^{-\frac{t}{T_r}} \sin \omega t \tag{11}$$

mit  $\omega = \gamma H$

Für den magnetischen Fluss  $\Phi$  in der Spule, dessen Achse zur  $x$ -Achse parallel ist, gilt die Gleichung

$$\Phi = 4 \pi J_0 e^{-\frac{t}{T_r}} \cdot sw \cos \omega t \quad (12)$$

mit  $s$  = Flächeninhalt der Spule und  $w$  = Zahl der Drahtwindungen. Hieraus ergibt sich

$$E = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4 \pi J_0 sw \omega e^{-\frac{t}{T_r}} \sin \omega t + 4 \pi J_0 sw \frac{1}{T_r} e^{-\frac{t}{T_r}} \cos \omega t \quad (13)$$

Da indessen  $\omega \gg \frac{1}{T_r}$ , kann man das zweite Glied in diesem Ausdruck vernachlässigen und erhält so für die elektromotorische Kraft

$$E = 4 \cdot 10^{-8} \pi \kappa H_0 sw \gamma H e^{-\frac{t}{T_r}} \sin \omega t \quad (14)$$

wobei  $\kappa H_0 = J_0$  und  $E$  in Volt ausgedrückt sind.

Die induzierte elektromotorische Kraft hat somit den Charakter einer gedämpften Schwingung mit der Frequenz  $\omega = \gamma H$  und der Anfangsamplitude

$$E_0 = 4 \cdot 10^{-8} \pi \kappa H_0 v w_0 \gamma H \quad (15)$$

worin  $v$  das Volumen der Wasserprobe und  $w_0$  die Windungszahl je cm der Spulenlänge ist. Der Dämpfungskoeffizient dieser Schwingungen ist der Zeitdauer  $T_r$  der transversalen Relaxation umgekehrt proportional.

Versuche haben erwiesen, dass bei reinem Wasser die Relaxationszeit  $T_r$ , die Größenordnung 1 . . . 2 Sekunden hat, und eine solche Zeit ist vollends hinreichend zum Feststellen der Schwingungszahl mittels Aufzeichnung auf dem Oszillographenstreifen oder unter Anwendung eines Ableseverfahrens.

Diesartige Schwingungen haben in einem erdmagnetischen Feld der Intensität  $H = 0,5$  Oe, der Feldintensität in Leningrad entsprechend, eine Frequenz  $f$  folgender Höhe:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2600 H_2 \quad (16)$$

Der Stromkreis, in den die Aufnahmespule eingeht, umfasst eine Kapazität  $C$ , eine Induktanz  $L$  und einen Widerstand  $R$ . Daher

bestimmt sich die Spannung  $U$  an den Polen dieses Kreises nach der Formel

$$U = I \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (17)$$

Normalerweise steht der Strom  $I$  in der Spule in Resonanz mit der zu messenden Frequenz  $\omega$ ; es ist also  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ , d.h.  $U = IR = E$  und folglich

$$I = \frac{E}{R} \quad (18)$$

Der Effektivwert der Blindspannung an den Spulendenen ist dann

$$U_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{2} IL\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{E}{R} L\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} EQ \quad (19)$$

Hier ist  $Q = \frac{L\omega}{R}$  der Gütefaktor (*Q-Faktor*) der Spule, den eine blosse Zahl angibt.

Um eine solche Spannung wahrnehmen zu können, ist es notwendig, dass diese um mindestens einige Zehnerpotenzen die Intensität  $U_n$  des Wärmegeräusches übertrifft, wclch letztere durch die Formel

$$U_n = 2 \sqrt{kT\Delta fFR_0} \quad (20)$$

angegeben werden kann.

In der Formel (20) bezeichnet  $k$  die Boltzmannsche Konstante,  $T$  die absolute Temperatur,  $\Delta f$  die Durchlassbreite des Verstärkers,  $F$  seinen Klirrfaktor und  $R_0$  den Resonanzwiderstand, wobei  $RQ^2$  der Stromkreis der Spule ist.

Es gilt nun, den Quotienten  $\frac{U_{\text{eff}}}{U_n}$  für eine Spule zu bestimmen, die zu gleicher Zeit als magnetisierende Spule und auch als Aufnahmespule arbeitet. Aus den Gleichungen (15), (19) und (20) erhält man

$$\frac{U_{\text{eff}}}{U_n} = \frac{\sqrt{2} \pi \kappa H_0 v w_0 \omega}{\sqrt{kT\Delta fFR}} \quad (21)$$

Wird in dieser Formel  $H_0$  durch die Stromstärke  $I$  in einer Spule von der Gestalt eines Solenoids mit mehreren Wicklungslagen und  $w_0$  durch die

Induktanz  $L$  sowie letztere wiederum an Hand des  $Q$ -Faktors ausgedrückt, während statt der Stromstärke  $I$  die Leistung  $P$  eingeführt wird, so geht unter Heranziehung der Zusammenhänge

$$H_0 = k_0 4\pi w_0 I, \quad Q = \frac{\omega L}{R}, \quad P = I^2 R \quad \text{und} \quad L = k_0 4\pi w_0^2 v, \quad (22)$$

wo  $k_0$  ( $< 1$ ) ein von den Spulendimensionen abhängiger Koeffizient ist, der Ausdruck für  $\frac{U_{eff}}{U_n}$  in folgende Form über:

$$\frac{U_{eff}}{U_n} = \pi \sqrt{2} \kappa Q \sqrt{\frac{P}{kT \Delta f F}} \quad (23)$$

wo  $P$  und  $kT$  in den gleichen Einheiten auszudrücken sind.

Durch Betrachten des Quotienten  $\frac{U_{eff}}{U_n}$  kann man an Hand dieser Formel feststellen, welche Grösse die in der Spule aufgewandte Leistung  $P$  haben muss. Demnach findet man, unter der Annahme dass  $\frac{U_{eff}}{U_n} = 100$ , der Durchlassbereich  $\Delta f = 50$ , der Gütefaktor der Spule  $Q = 50$  und die Normaltemperatur  $T = 298^\circ\text{K}$  ist,

$$P = \frac{1000 k \cdot 293 \cdot 50 F}{2\pi^2 \kappa^2 \cdot 2500} \quad (24)$$

Setzt man hier die Werte  $\kappa = 3 \cdot 10^{-10}$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$  und  $F = 2$  ein, so ergibt sich

$$F = 9,1 \cdot 10^6 \text{ erg/cm} = 0,91 \text{ Watt} \quad (25)$$

Die Formel (23) lässt erkennen, dass die besten Resultate bei hohen  $Q$ -Werten der Spule erzielt werden. Drückt man in der Formel die Induktanz  $L$  und den Widerstand  $R$  durch die geometrischen Dimensionen der Spule aus, so hat man

$$Q = 10^{-9} k_0 \sigma \pi w_0 s' d \omega \quad (26)$$

worin  $d$  der mittlere Spulendurchmesser,  $s'$  die Querschnittsfläche des Spulenleiters und  $\sigma$  dessen spezifische Leitfähigkeit in  $\text{Ohm}^{-1}\text{cm}^{-1}$  ist.

Somit ist der  $Q$ -Faktor der Windungszahl je cm, dem mittleren Spulendurchmesser und dem Flächeninhalt des Leiterquerschnitts verhältnisgleich. Mit zunehmendem mittlerem Durchmesser wird der Wert



des Koeffizienten  $k_0$  geringer und ist nach einer Änderung von  $d$  um einige Grössenordnungen nahe gleich dem Quotienten  $\frac{l}{d}$ . Daher ist die zunehmende Dipolwirkung der Windungen ohne praktische Bedeutung, zumal mit wachsendem  $w_0$  die in der Spule aufgewandte Leistung ansteigt.

In Tabelle 1 ist der Koeffizient  $k_0$  in Abhängigkeit von dem Quotienten des Durchmessers  $d$  und der Länge  $l$  einer einlagigen Spule angegeben. Tabelle 2 wiederum zeigt die  $Q$ -Werte für verschiedene Zusammenstellungen der Spulenparameter, wobei  $f = 2600$  Hz und  $\sigma = 2 \cdot 10^5$  Ohm $^{-1}$ cm $^{-1}$  angenommen wurde.

Tabelle 1.

$\frac{d}{l}$	0,5	1,0	1,43	2,0	3,33	5
$k_0$	0,81	0,68	0,60	0,52	0,40	0,52

Tabelle 2.

	$w = 1000$			$w = 500$		
Leiterdurchm. mm	1	0,5	0,3	1	0,5	0,3
$\frac{d}{l}$	0,5	34	8,4	3,6	17	4,2
» 1	57	14	5,1	25	7	2,6
» 2	87	21	7,8	41	20,5	3,9

Ist das zu messende Feld in genügender Ausstreckung homogen, wie dies z.B. beim erdmagnetischen Feld der Fall ist, so kann als magnetisierende und Aufnahmespule ein Solenoid mit mehreren Windungslagen, ein Toroid, Anwendung finden, für welchen der Koeffizient  $k = 1$  ist. Ausser durch den Vorteil des höchsten  $Q$ -Faktors für gegebene Werte der Windungszahl und der Prüflingsvolumens zeichnet sich der Toroid auch dadurch aus, dass er nicht durch äussere Wechselfelder stören beeinflusst wird.

Für einen Toroid zur Messung der Intensität des erdmagnetischen Feldes (wenn diese den Betrag 0,6 Oe hat), welcher den Durchmesser  $D$  hat und mit Kupferdraht bewickelt ist, erhält man die Werte der Parameter  $R$ ,  $L$  und  $Q$  aus den Formeln

$$R = 1,57 \cdot 10^{-5} \frac{wd}{s'}; \quad L = 3,1 \cdot 10^{-9} \frac{w^2 d^2}{D}; \quad Q = 0,51 \frac{wd}{D} s' \quad (27)$$

Die Spannung an den Spulenden  $U_{eff}$  und das Verhältnis  $\frac{U_{eff}}{U_n}$  ergeben sich aus den Formeln

$$U_{eff} = 1,1 \cdot 10^{-13} \frac{w^3 d^3}{D^2} s' I ; \quad \frac{U_{eff}}{U_n} = 1,6 \cdot 10^{-11} \frac{(wd)^{3/2}}{D} \sqrt{s'} \quad (28)$$

wo  $R$  in Ohm,  $L$  in Henry,  $U_{eff}$  in Volt und  $I$  in Ampère ausgedrückt ist. Für den Durchlassbereich des Verstärkers wird eine Breite von 50 Hz angenommen. Wenn  $w = 2000$ ,  $d = 2$  cm,  $D = 20$  cm,  $s' = 0,01$  cm<sup>2</sup> und  $I = 100$  A, erhält man folgende Werte:

$$R = 6,2 \text{ Ohm}, \quad L = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Henry}, \quad Q = 6,7 .$$

$$U_{eff} = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ Volt}, \quad \frac{U_{eff}}{U_n} = 100$$

#### *Die Messung von $H$ nach der Methode der freien Induktion*

Die Messung von  $H$  nach der Methode der freien Kerninduktion ist völlig verschieden von dem Vorgehen, das in den zuvor betrachteten Verfahren von BLOCH und POUND verwendet wird, da in diesem Fall der Stoff selbst mit seinen präzessierenden Kernen als Oszillator arbeitet. Aus diesem Grund ist die Messanordnung wesentlich einfacher; sie setzt sich im Prinzip aus drei Elementen zusammen: dem Messkörper oder der Sonde ( $K$ ), bestehend aus einer Spule und der darin eingeschlossenen Wasserampulle (dieses Element kann zugleich als Magnetisiervorrichtung dienen), dem Schwingungsverstärker ( $U$ ) und dem Frequenzmesser ( $I$ ) (Bild 2).

Der in Bild 2 gezeigte Umschalter ( $P$ ) hat die Aufgabe, die Sonde zuerst zum Zweck der Magnetisierung des Prüflings an eine Gleichstromquelle zu legen und sie dann rasch auf den Frequenzmesskreis umzuschalten.

Der Frequenzmesser kann jeder beliebigen Art sein, wenn er nur instande ist, Frequenzen von einigen Kilohertz mit solcher Genauigkeit zu messen, dass der Fehler 0,01 % nicht überschreitet.

Ein in der Praxis ausprobiertes Verfahren besteht darin, die zu messende Frequenz und diejenige von einem Normalgenerator zu mischen und die Differentialfrequenz mit einem Schleifenzillographen zu beobachten. Hierbei wird die Spannung von der Sonde mit der Frequenz

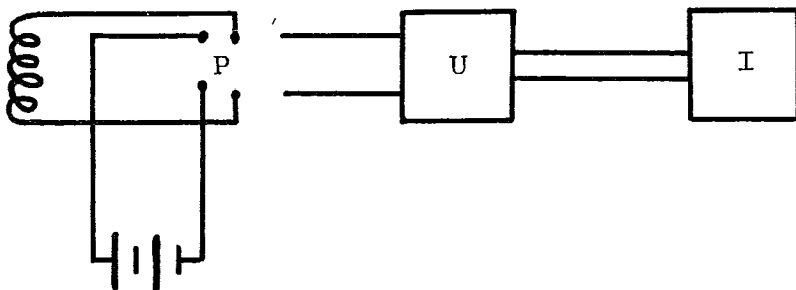


Abb. 2.

$f$  nach erfolgter Verstärkung gleichzeitig mit der vom Normalgenerator gelieferten Spannung der Frequenz  $f_0$  einer Mischstufe zugeführt.

Von der Mischstufe werden die Schwingungen, welche die Frequenz  $f' = |f - f_0|$  haben, auf einen Schleifenzillographen ( $O$ ) gegeben, der sie in Form einer gedämpften Sinuskurve aufzeichnet.

Die gesuchte Frequenz ergibt sich aus der Formel

$$f = f_0 \pm f' \quad (29)$$

Die Frequenz des Normalgenerators muss mit solcher Genauigkeit bekannt sein, dass der Fehler  $10^{-3} \%$  nicht überschreitet. Dies erreicht man durch Eichen desselben gegen ein Frequenznormal, wie sie von den Eichinstituten auf dem Drahtweg oder drahtlos gegeben werden.

Laut Gleichung (29) darf der relative Fehler der Frequenz  $f'$ , wenn der Fehler in der Bestimmung von  $f_0$  ausser Acht gelassen wird, das gleiche Vielfache des relativen Fehlers von  $f$  betragen wie die Frequenz  $f$  im Vergleich mit  $f'$ . Somit hat man, wenn  $f'$  kleiner als 10 Hz und

$$\frac{\Delta f}{f} = 10^{-4} \text{ ist}$$

$$\frac{\Delta f'}{f'} \leq 4 \cdot 10^{-1} \quad (30)$$

Je mehr sich die Frequenz  $f_0$  des Normalgenerators der zu messenden Frequenz  $f$  nähert, umso genauer gestalten sich demnach die Messungen der Feldstärke  $H$ , wofür die folgende Formel gilt:

$$H = \frac{2\pi}{\gamma} (f \pm f') \quad (31)$$

Ein zweites Verfahren, das ebenfalls ausgedehnte Anwendung erlangt hat, ist die Zählmethode, bei der die Schwingungen (Impulse) je Sekunde unmittelbar abgezählt werden. Beschreibungen dieser Methode sind im Schrifttum zu finden weshalb sich hier ein Verweilen bei derselben erübrigt.

### *Die Messung an geeichten Spulen*

Die Methode der freien Kerninduktion kann bei Messungen der Konstanten an solchen geeichten Spulen angewandt werden, in denen die Feldstärke der Stromstärke von 1 A in der Spule gleichkommt und die so klein sind, dass sie keine Messung mit zwangsläufig gesteuerter Induktion zulassen. Eine notwendige Voraussetzung dieser Anwendung ist jedoch, dass die Spule ein genügend homogenes Feld hat, dessen Fehler innerhalb der Grenzen der Prüflingsdimensionen, die nicht beliebig weit verkleinert werden können, nicht 0,01 % überschreitet.

Wenn die Intensitätswerte des Spulenfeldes niedriger Grössenordnung sind, tritt auch das erdmagnetische Feld in gleichgradiger Stärke in Wirkung. Daher ist die zu messende Grösse  $\bar{H}_1$  die (geometrische) Summe  $\bar{H}_K + \bar{H}_T$ , wo  $H_K$  die Intensität des Spulenfeldes und  $H_T$  die des erdmagnetischen Feldes bezeichnet. Hieraus findet man geometrisch

$$H_1^2 = H_K^2 + H_T^2 - 2 H_K H_T \cos \beta \quad (32)$$

worin  $\beta$  der Winkel zwischen  $H_K$  und  $H_T$  ist. Bezeichnet man ferner mit  $f_1$  die Präzessionsfrequenz (dem Feld  $H_1$  entsprechend) und mit  $f_T$  dieselbe Frequenz bei alleiniger Wirkung des Feldes  $H_T$ , so ergibt sich

$$\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 f_1^2 = H_K^2 + \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 f_T^2 - 2 H_K H_T \cos \beta \quad (33)$$

Umkehren der Stromrichtung in der Spule ändert den Winkel  $\beta$  um  $180^\circ$ . Die (geometrische) Summe der Feldintensitäten sei nun  $\bar{H}_2$ . Mit  $f_2$  als Bezeichnung der Frequenz in diesem Fall hat man

$$\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 f_2^2 = H_K^2 + \left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)^2 f_T^2 + 2 H_K H_T \cos \beta \quad (34)$$

Addition der Gleichungen (33) und (34) Glied für Glied liefert

$$H_K = \frac{2\pi}{\gamma} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{2} - f_T^2} \quad (35)$$

und hieraus erhält man für die Spulenkonstante

$$K = \frac{H_K}{J} \quad (36)$$

Zur Messung des Spulenfeldes ist es somit notwendig, die Frequenz  $f_T$  bei stromloser Spule zu messen sowie zwei Messungen der Frequenz bei verschiedener Stromrichtung,  $f_1$  bzw.  $f_2$ , auszuführen.

Die Formel (35) gibt zu erkennen, dass der Wert von  $H_K$  nicht von der Orientierung der Spule in bezug auf das erdmagnetische Feld abhängig ist. Daher erscheint der Winkel  $\beta$  nicht in der Formel. Dies ist jedoch nur dann richtig, wenn sich die Intensität und Richtung des erdmagnetischen Feldes nicht mit der Zeit ändern. In Wirklichkeit schwankt indessen dieses Feld unaufhörlich, weshalb die Werte für  $H_T$  und für den Winkel  $\beta$  zur Zeit der Messung von  $f_2$  etwas verschieden von denjenigen zum Zeitpunkt der Messung der Frequenz  $f_1$  sein werden.

Gibt man diese Verschiedenheit in den Werten von  $H_T$  und  $\beta$  mit  $\partial H_T$  bzw.  $\partial\beta$  an, so sieht man leicht, dass der hierdurch bewirkte, in der Messung von  $H_K$  begangene Fehler  $\Delta H_K$  aus folgender Gleichung hervorgeht:

$$(H_K \pm H_T \cos \beta) \Delta H_K = \pm H_T H_K \sin \beta \partial\beta - (H_T \pm H_K \cos \beta) \partial H_T \quad (37)$$

Somit hat die Richtungslage der Spule einen wesentlichen Einfluss auf den durch die Feldvariationen hervorgerufenen Fehler  $\Delta H_K$ .

Wenn die Spulenachse dem erdmagnetischen Feld parallel eingestellt wird, wobei der Winkel  $\beta = 0$  ist, hat man

$$\Delta H_K = - \partial H_T \quad (38)$$

Dann treten die Richtungsvariationen des erdmagnetischen Feldes nicht in der Grösse  $H_K$  in Erscheinung.

Ist  $\beta = 90^\circ$ , d.h. steht die Spulenachse senkrecht auf der Richtung des erdmagnetischen Feldes, so ist

$$\Delta H_K = - \frac{H_T}{H_K} \partial H_T \pm H_T \partial\beta \quad (39)$$

Wenn  $\partial H_T$  und  $\partial\beta$  bekannt sind, können an Hand der Formeln (38) und (39) an der zu messenden Grösse  $H_K$  Korrekturen hinsichtlich der Variation des erdmagnetischen Feldes angebracht werden. Bei allen Messungen ist es jedoch sinnvoller, statt der Anwendung von Korrektionsgliedern nach Möglichkeit deren Erforderlichkeit auszu-

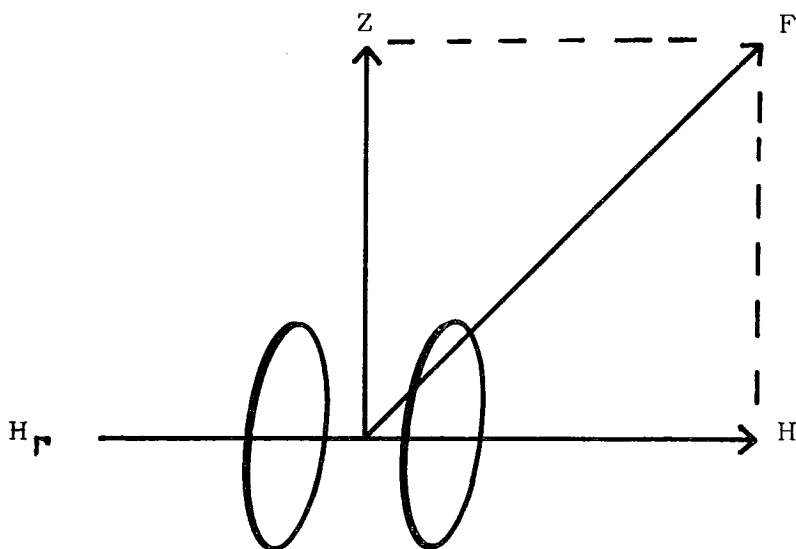


Abb. 3.

schalten. Im vorliegenden Fall ist dies erreichbar, indem man die Spulenachse dem erdmagnetischen Feld parallel einrichtet. Dann vereinfacht sich auch die Formel für  $H_K$  zu

$$H_K = H_2 - H_1 = \frac{\pi}{\gamma} (f_2 - f_1) \quad (40)$$

Die Messung der Intensität des erdmagnetischen Feldes  $H_T$  stellt dann nur noch ein Mittel zur Kontrolle dar, ob  $f_1$  und  $f_2$  richtig gemessen sind, da die Gleichung

$$f_T = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (41)$$

erfüllt sein muss.

#### *Messung der Komponenten des erdmagnetischen Feldes*

Die Messung jeder beliebigen Komponente des erdmagnetischen Feldvektors ist möglich, indem man die zwei anderen Komponenten mit Hilfe von Helmholtzschen Spulen oder mittels eines anderen geeigneten Spulensystems (Quadratspulen) kompensiert, vorausgesetzt, dass damit ein homogenes Feld erzielt wird (Bild 3).

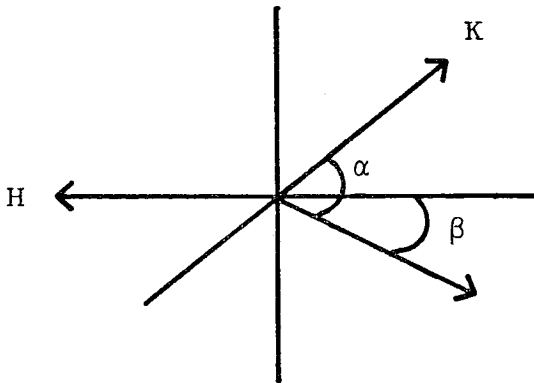


Abb. 4.

Demgemäss genügt es z.B. zur Messung der Vertikalkomponente, dass man die Horizontalkomponente kompensiert, nachdem zuerst die Achse der Helmholtzschen Spule nach dem magnetischen Meridian ausgerichtet worden ist. Durch Einbringen der Sonde im Spulenzentrum, wobei die Ausdehnung des Wasserprüflings die Grenzen des homogenen magnetischen Feldes nicht überschreiten darf, können wir dann nach der Methode der freien Induktion die Messung der Vertikalkomponente bewerkstelligen.

Wir wollen nun sehen, was für Fehler beim Anwenden dieses Verfahrens entstehen, wenn die Spulenachse fehlerhaft eingerichtet oder die Horizontalkomponente unvollkommen kompensiert wird.

Es sei angenommen, dass die Spulenachse im Winkel  $\alpha$  zur Horizontalebene steht (Bild 4) und mit der Ebene des magnetischen Meridians den Winkel  $180^\circ - \beta$  bildet sowie dass die Intensität des Spulenfeldes  $H_1$  um den geringen Betrag  $\Delta H$  von der Horizontalkomponente  $H$  abweicht, d.h.  $\Delta H = H - H_1$ . Dann ergibt sich die Intensität  $Z'$  im Spulenzentrum aus dem Ausdruck

$$Z'^2 = (Z + H_1 \sin \alpha)^2 + (H - H_1 \cos \alpha \cos \beta)^2 + H_1^2 \sin^2 \beta \quad (42)$$

und hieraus folgt, wenn die geringen Beiträge vierten Grades in bezug auf  $\Delta H$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  vernachlässigt werden,

$$Z' - Z = H_1 \sin \alpha + \frac{1}{2} \frac{(\Delta H)^2}{Z^2} + \frac{1}{2} \frac{H^2}{Z^2} (\alpha^2 + \beta^2) \quad (43)$$

In dieser Gleichung ist das erste Glied das grösste, aber dieses ist leicht zu eliminieren, indem man die Spulenachse um  $180^\circ$  wendet und die Grösse des dann vorhandenen Vektors misst, den wir mit  $Z''$  bezeichnen wollen. Bei der Umkehr wechseln die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  ihr Zeichen und demzufolge auch das erste Glied  $H_1 \sin \alpha$ . Addition der Gleichungen für  $Z' - Z$  und  $Z'' - Z$  liefert für den relativen Fehler die Gleichung

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{(Z' + Z'') - 2Z}{2Z} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta H)^2}{Z^2} + \frac{1}{2} \frac{H^2}{Z^2} (\alpha^2 + \beta^2) \quad (44)$$

Nimmt man an, dass der Kompensationsfehler der Horizontalkomponente 1 % und der Orientierungsfehler der Spulenachse  $1^\circ$  beträgt,

$$\text{d.h. } \frac{\Delta H}{H} = 0,01 \quad \text{und} \quad \alpha = \beta = 1^\circ, \quad \text{so ist} \quad \frac{\Delta Z}{Z} = 3,5 \cdot 10^{-4} \frac{H^2}{Z^2}.$$

Hierbei ist dann ein Siebentel des Fehlers der unvollständigen Kompensation zuzuschreiben, während die Fehlorientierung für 6/7 desselben verantwortlich ist.

Das Verhältnis  $\frac{H}{Z}$  variiert im Gebiet der Sovietunion von 0,001

(in den Polargegenden) bis 0,75, weshalb der Fehler  $\frac{\Delta Z}{Z}$  bei den ange-

gebenen Werten von  $\Delta H$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  sich innerhalb der Grenzen  $0 \dots 1,8 \cdot 10^{-4}$  hält. Damit der durch ungenaue Richtungseinstellung und unvollkommene Kompensation bewirkte Messfehler in  $Z$  0,01 % nicht überschreite, genügt es also beim Anwenden der Methode der freien Induktion, wenn die horizontale Komponente auf einige Prozent genau kompensiert und die Spulenachse auf  $1^\circ$  genau in die Horizontalebene und in den magnetischen Meridian eingerichtet wird.

Zur Bestimmung der Horizontalkomponente  $H$  dagegen muss die Kompensation der Vertikalkomponente und die Einstellung der Spulenrichtung mit erheblich höherer Genauigkeit erfolgen, da in diesem Fall

der Fehler  $\frac{\Delta H}{H}$  dem Quotienten  $\frac{Z^2}{H^2}$  proportional sein wird und letzt-

genannter im Bereich der Sovietunion in den Grenzen  $1000 \dots 1,3$  variieren kann.



*Bestimmung des Gyromagnetischen Beiwerts des Protons im schwachen Magnetfeld*

Zur praktischen Ausführung magnetischer Messungen ist Kenntnis der Grösse  $\gamma$  notwendig, und diese Grösse kann nur experimentell bestimmt werden. Aus der Gleichung  $\omega = \gamma H$  erkennt man, dass  $\gamma$  ermittelt werden kann, indem man die Frequenz  $\omega$  in einem Magnetfeld von bekannter Intensität bestimmt.

Im Laboratorium für magnetische Messungen der Meteorologischen Wissenschaftlichen Forschungsanstalt in Leningrad sind gegenwärtig Arbeiten zur Bestimmung des Gyromagnetismus von Protonen nach der Methode der freien Induktion im Gange. Als Erzeuger des Magnetfelds dienen Helmholtzsche Spulen, bei denen die Stärke des magnetischen Feldes aus der Stromstärke und den geometrischen Abmessungen der Spulen nach der Formel

$$H = K I$$

ermittelt werden kann, wo  $K$  eine Spulenkonstante und  $I$  die Stromstärke in der Spule ist. Die in den besagten Versuchen benutzten Helmholtzschen Spulen bestehen aus Quarzzyindern von etwa 30 cm Durchmesser, die mit blankem Draht bewickelt sind. Tabelle 3 zeigt die exakten Parameterwerte für eines von fünf Spulenpaaren.

Tabelle 3.

Abstand der Spulenmittelebenen mm	Mittlerer Leiterdurchmesser mm	Aussendurchmesser der Spule No. 1		Bewicklungen mm Spule No. 2	
		⊕	⊖	⊕	⊖
135,008	0,9470	270,658	270,660	270,712	270,702
±0,002	±0,0003	±0,002	±0,002	±0,002	±0,002

Die Spulenkonstante hat für diese Spule in ihrem Zentrum den Wert  $K = (0,666300 \pm 0,000020) \text{ Oe/A.}$

Die Stromstärke in der Spule wird nach dem Kompensationsverfahren gemessen, und zwar ist der dabei begangene Fehler der Grössenordnung  $1 \cdot 10^{-3} \%$ . Diese Genauigkeit wird mittels Temperaturregelung des Normalelements und des Normalwiderstands erreicht.

Als Sonde dient beim Messen der magnetischen Feldstärke in der oben besprochenen Weise ein Glaswürfel von  $8 \text{ cm}^3$  Rauminhalt, der mit destilliertem Wasser gefüllt ist. Wenn die Dimensionen der Helmholtz-

sehen Spulen der oben angegebenen Art sind, überschreitet die Inhomogenität des von ihnen erzeugten magnetischen Feldes nicht den Betrag  $2 \cdot 10^{-3} \%$ .

Die Bestimmung der Frequenz  $\omega$  erfolgt durch Messen der Interferenzfrequenz des Kernsignals und einer Normalfrequenz.

Zur genauen Messung der Überlagerungsfrequenz ist es notwendig, über eine Normalfrequenz zu verfügen, welche der Präzessionsfrequenz des Kernspins genügend nahe liegt. Solche Frequenzen werden mittels eines kristallgesteuerten Messgenerators ( $G$ ) durch Frequenzteilung erzielt. Der Generator wird in vorgeschriebenen Zeitabständen gegen eine Grundfrequenz geeicht, die drahtlos empfangen wird. Dank dieses Verfahrens ist der Frequenzfehler des Normalgenerators nicht über  $10^{-4} \%$ . Die zu messende Frequenz und die Normalfrequenz werden der Mischstufe ( $M$ ) und die hier entstehende Differenzfrequenz dem Schleifenzillographen ( $O$ ) zugeführt, wo letztere aufgezeichnet wird. Der Oszillograph erhält zugleich Zeitmarkensignale in Abständen von 0,01 Sekunden. Bild 5 zeigt dies in schematischer Darstellung ( $U =$  Verstärker).

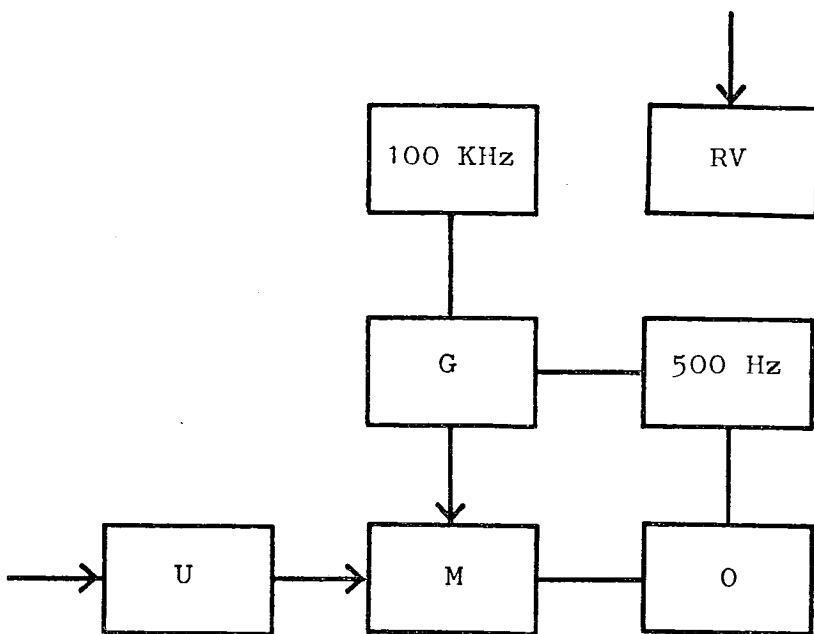


Abb. 5.

Da die Messungen im Wirkungsbereich des erdmagnetischen Feldes ausgeführt werden, wird die Frequenz der Kernpräzession durch die Summe der Intensitätsvektoren des Spulenfeldes und des erdmagnetischen Feldes bestimmt. Zwecks Elimination des erdmagnetischen Einflusses werden zwei Messungen mit Stromumkehr in der Spule vorgenommen. Der gyromagnetische Beiwert bestimmt sich dann aus der Formel

$$\gamma = \frac{2\pi}{KI} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{2}} - f_3^2 \cdot (1 + \sum p_i) \quad (45)$$

worin  $f_1$  und  $f_2$  die bei verschiedenen Stromrichtungen beobachteten Frequenzen,  $f_3$  die Frequenz der Kernsignale bei alleiniger Einwirkung des erdmagnetischen Feldes und  $\sum p_i$  die Summe der Korrektionssterme darstellen.

Die Messungen wurden auf dem Lande im Laboratorium von Kavgolovo ausgeführt, wo Möglichkeit bestand, die Variation der erdmagnetischen Feldkomponenten zu registrieren, die in Formel (45) in den Korrektionsgliedern vorkommen.

Im Laboratorium soll der Gyromagnetismus des Protons bei kompensiertem erdmagnetischem Feld gemessen werden. Dies wird den Messvorgang beträchtlich vereinfachen.

Die ersten Messungen des Gyromagnetismus der Protonen, mit Helmholtzschen Spulen ausgeführt, deren Parameter den oben angeführten ähnlich sind, ergaben das Resultat

$$\gamma = (2,67520 \pm 0,00015) \cdot 10^4 \text{ Oe}^{-1} \text{ sec}^{-1} \quad (46)$$

Der im obigen Wert vorkommende Fehler ist im Grunde zufallsbedingter Art; er ist auf Ungenauigkeiten in der Deutung der vom Schleifenzillographen und von den Instrumenten zum Registrieren der erdmagnetischen Variationen gelieferten Aufzeichnungen zurückzuführen.

Den Gyromagnetismus des Protons haben mittels zwangsweise gesteuerter Kernresonanz THOMAS *et al.* (in den Vereinigten Staaten) in einem elektromagnetischen Feld der Grössenordnung 5000 Oe sowie WILHELMY (in Deutschland) im magnetischen Feld eines Solenoids von der Intensität 100 Oe gemessen. Diese Messungen führten zu folgenden Ergebnissen:

$$\begin{aligned} \text{THOMAS } et \text{ al.: } \gamma &= (2,67523 \pm 0,00006) \cdot 10^4 \text{ Oe}^{-1} \text{ sec}^{-1} \\ \text{WILHELMY } \quad \gamma &= (2,67549 \pm 0,00008) \cdot 10^4 \text{ Oe}^{-1} \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \quad (47)$$

Sämtliche  $\gamma$ -Werte sind ohne diamagnetische Korrektur angegeben. Vergleicht man den nach dem Verfahren der freien Kerninduktion in einem Feld von ca. 0,6 Oe erhaltenen  $\gamma$ -Wert mit den obenstehenden, so findet man, dass deren Unterschiede gleicher Grössenordnung mit der Streuung sind.

Wenn man den gyromagnetischen Beiwert des Protons nach der Methode der freien Kernresonanz misst, hat man im Vergleich mit dem Verfahren der zwangsweise gesteuerten Resonanz den Vorteil, dass sich die Intensität des Feldes  $H$  auf Grund der geometrischen Abmessungen der Spulen berechnet, die hinreichend genau bestimmt werden können. Im Verfahren von THOMAS erfolgt die Bestimmung des magnetischen Feldes experimentell, weshalb diese Methode bedeutend mehr Anlass zu systematischen Fehlern bietet. Das von WILHELMY zur Anwendung gebrachte Verfahren hat den Nachteil, dass der zum Erzeugen des erforderlichen Feldes notwendige Strom von 10 A schwer mit genügender Genauigkeit messbar ist.

Im Staatlichen Institut für Masse und Messgeräte in Charkow werden seeben Messungen des Gyromagnetismus nach einem der THOMASSchen Methode ähnelnden Verfahren betrieben. Es ist zu erhoffen, dass die in den Instituten von Leningrad bzw. Charkow nach verschiedenen Methoden auszuführenden Messungen nicht nur der Ergründung von  $\gamma$  dienen werden; sie können auch in der Schätzung der Genauigkeit des absoluten Ampère nützlich sein. Es verhält sich nämlich so, dass bei der Methode der zwangsweise gesteuerten Induktion die Stromstärke, die experimentell bestimmt wird, in der Formel des gyromagnetischen Beiwerts im Zähler, bei der Methode der freien Induktion dagegen im Nenner vorkommt. Aus diesem Grunde zieht sich ein systematischer Fehler in der Festlegung der absoluten Ampère-Einheit einmal als zu grosser und das anderemal als zu kleiner Wert von  $\gamma$ , insofern die Messfehler der übrigen Parameter im Vergleich mit dem im Stromstärkewert auftretenden systematischen Fehler von geringerem Betrag sind.